

RAPPORTO FINALE

UNITÀ DI M. MORANDI CECCHI

Maria Morandi Cecchi Manolo Venturin*

Università degli Studi di Padova
Dip. Matematica Pura ed Applicata

CORILA, dal 4 al 6 Giugno 2007

Indice

- ▶ Modellistica Fisico–Matematica:
 - ▶ Equazioni delle Acque Basse;
 - ▶ Equazioni di convezione – diffusione.

- ▶ Modellistica Numerica:
 - ▶ Schema Characteristic – Based – Split (CBS) Scheme
 - ▶ Metodo Characteristic – Galerkin;

- ▶ Sistema Laguna Venezia;

- ▶ Mesh anisotropiche;

Modellistica Fisico–Matematica: Eqz. Acque Basse

Equazione riformulate (trascurando i termini di diffusione) nelle incognite p (pressione) e $U_i = hu_i$ (velocità orizzontale)¹:

Equazione di continuità

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

Equazioni della quantità di moto

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i u_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} - Q_i \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

dove

- ▶ $p = \frac{1}{2}g (h^2 - H^2)$ “termine di pressione”;
- ▶ $c^2 = \frac{dp}{dh} = gh$ velocità di propagazione.

¹Convenzione di Einstein sugli indici ripetuti

Modellistica Fisico–Matematica:

Eqz. Acque Basse: condizioni iniziali ed al contorno

- ▶ Condizioni iniziali;
- ▶ Condizioni al contorno (implementate nel modello);
 - ▶ Dirichlet *i.e.* $\eta = \bar{\eta}$ su Γ_D
(valori di elevazione prescritti);
 - ▶ Neumann *i.e.* $U_i \cdot n_i = 0$ su Γ_N
(valori di flusso d'acqua prescritti).
- ▶ Altre condizioni al contorno (non ancora implementate);
 - ▶ contorni mobili (moving b.c.);
 - ▶ condizioni di assorbimento (absorbing b.c.).

Modellistica Fisico–Matematica: Eqz. Acque Basse: Principali difficoltà

- ▶ non–linearità;
- ▶ termini convettivi
(versione esplicita, semi-implicita ed implicita)
- ▶ incomprimibilità (LBB).

Metodo utilizzato:

- ▶ Characteristic – Based – Split (versione semi-implicita)

Modellistica Fisico–Matematica:

Eqz. di convezione – diffusione

Equazione del trasporto

$$\frac{\partial(hT)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (hu_i T) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(hk \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + R = 0$$

- ▶ T dispersione media di sostanza;
- ▶ k coefficiente medio di diffusione;
- ▶ h profondità del fluido;
- ▶ u_i velocità media del fluido del modello idrodinamico;
- ▶ R termine di sorgente ($R < 0$) od assorbimento ($R > 0$).
- ▶ variabile scalare di **tipo passivo**
(non influisce sul modello idrodinamico);
- ▶ Condizioni **iniziali** ed **al contorno**.

Modellistica Fisico–Matematica:

Eqz. di convezione – diffusione: Principali difficoltà

- ▶ operatori di convezione: $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$
 - ▶ descrizione Euleriana vs. descrizione Lagrangiana;
 - ▶ operatori non simmetrici vs. operatori simmetrici;
 - ▶ matrici non simmetriche vs. matrici simmetriche;
 - ▶ mesh fissa vs. mesh updating;

- ▶ presenza di oscillazioni nodo a nodo
 - ▶ raffinamento della mesh e passo temporale;
 - ▶ tecniche di stabilizzazione:

Metodo utilizzato:

- ▶ Characteristic – Galerkin.

Modellistica Numerica: Equazioni delle Acque Basse

Characteristic – Based – Split (CBS)

=

metodo Characteristic – Galerkin

+

tecnica di splitting sulle velocità (Chorin–Temam)

Lo schema si compone di **3 passi**:

- ▶ Risoluzione dell'equazione della quantità di moto senza il termine di pressione/elevazione mediante il metodo Characteristic – Galerkin;
- ▶ Risoluzione dell'equazione di continuità in forma di Laplaciano;
- ▶ Correzione del campo di velocità in termini di pressione.

Applicazioni: Equazioni delle Acque Basse.

Modellistica Numerica: Equazioni di Convezione – Diffusione

Characteristic-Galerkin
=
discretizzazione della derivata totale
(punto di vista Lagrangiano)
+
metodo di Galerkin agli elementi finiti

Applicazioni: Equazioni di convezione – diffusione.

Osservazione: È possibile introdurre una versione a due passi del metodo per aumentarne la stabilità.

Modellistica Numerica:

Schema del metodo

Passi dello schema numerico fissato tempo di avanzamento Δt

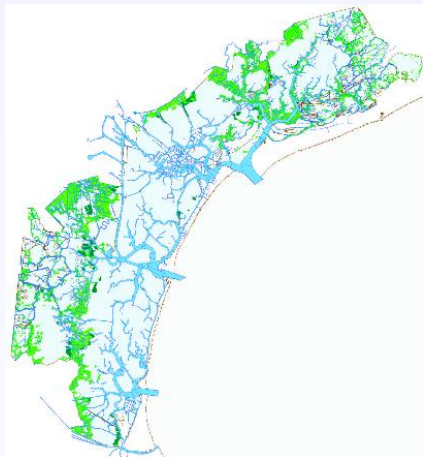
Discretizzazione temporale

1. calcolo delle velocità intermedia ΔU_i^* ;
2. calcolo del campo di pressione $p^{n+1} = p^n + \Delta p$;
3. calcolo della velocità finale $U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i$;
4. calcolo di eventuali variabili scalari aggiunte al modello
 $T^{n+1} = T^n + \Delta T$.

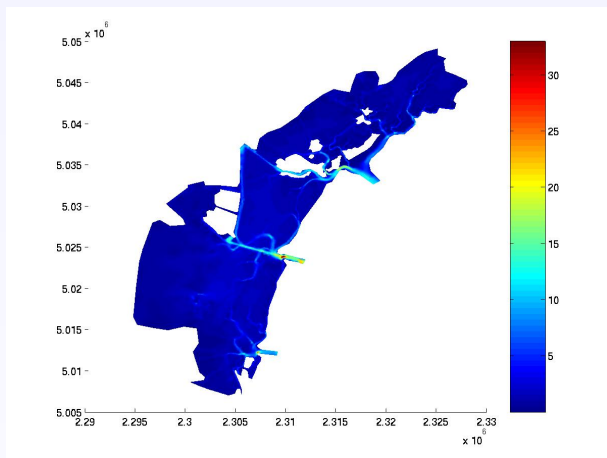
Discretizzazione spaziale

- ▶ discretizzazione spaziale di Galerkin con elementi finiti lineari su mesh triangolari

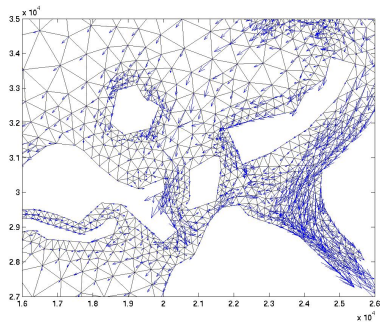
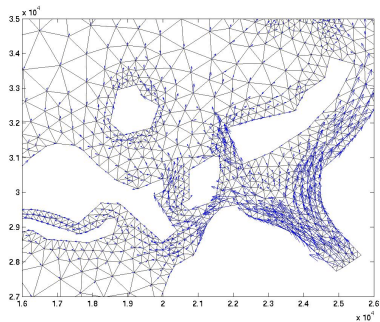
Laguna di Venezia: Il Sistema



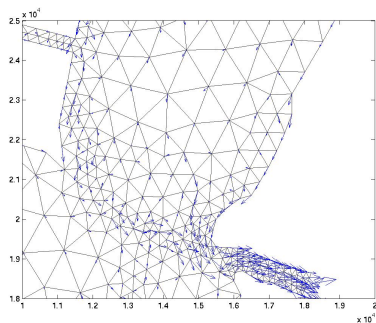
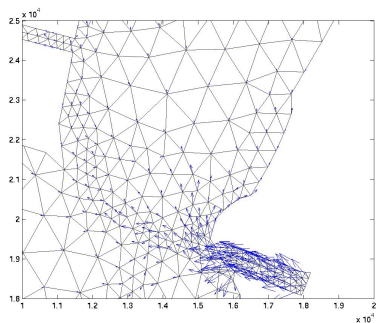
Laguna di Venezia: La batimetria



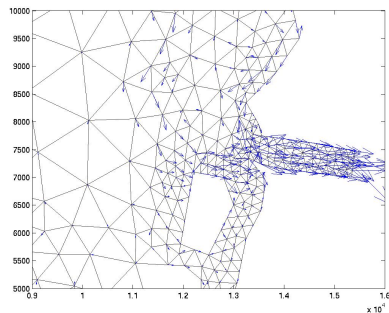
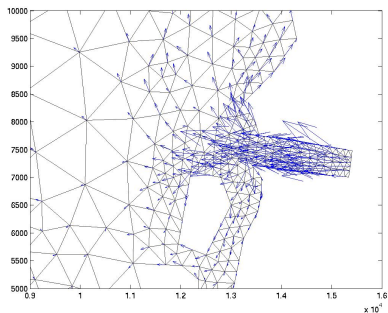
Laguna di Venezia: Esempio di flusso e riflusso a Lido



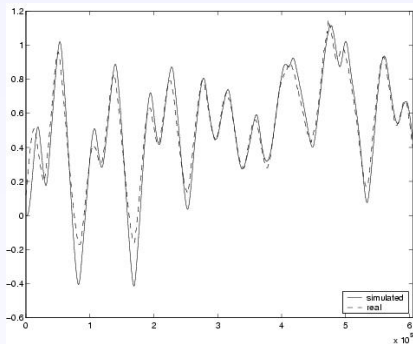
Laguna di Venezia: Esempio di flusso e riflusso a Malamocco



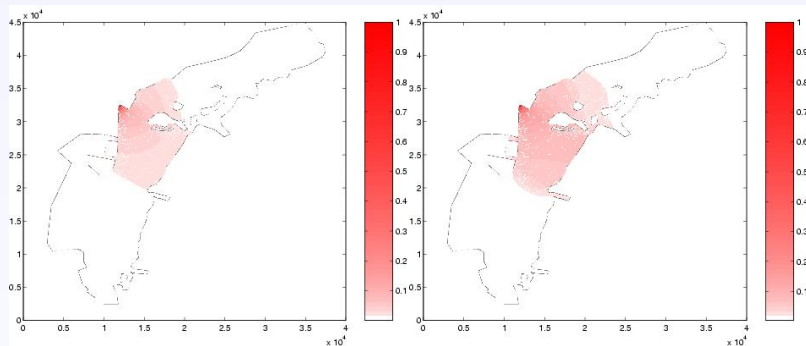
Laguna di Venezia: Esempio di flusso e riflusso a Chioggia



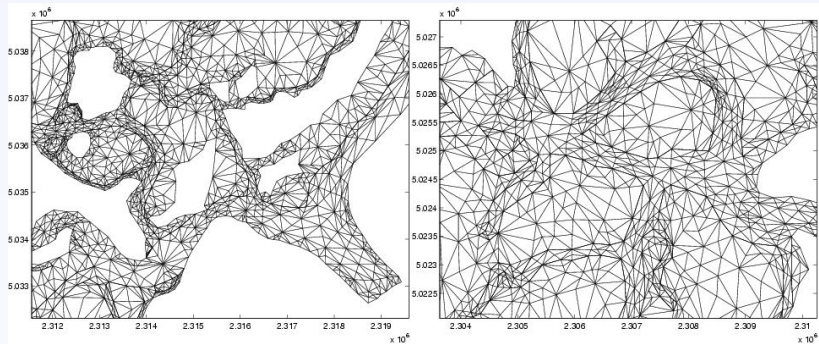
Laguna di Venezia: Confronto tra risultati e simulazioni a Grassabò



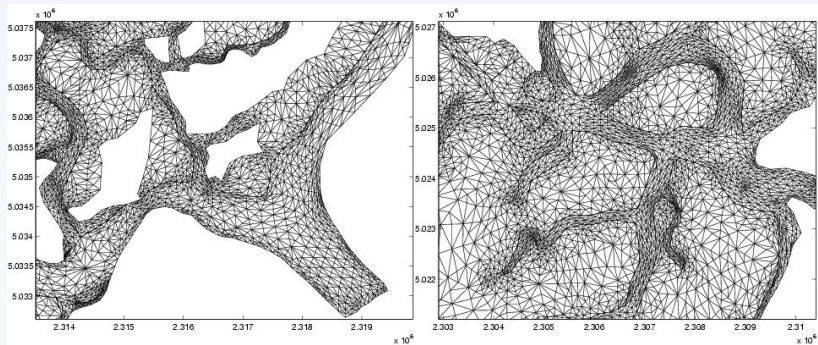
Laguna di Venezia: Esempio di Inquinante da Porto Marghera



Laguna di Venezia: Mesh Anisotropica



Laguna di Venezia: Mesh Anisotropica



Principali Riferimenti Bibliografici

- ▶ M. Morandi Cecchi, A. Pica, and E. Secco. A projection method for shallow water equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 27(1-4):81–95, 1998. Finite elements in fluids.
- ▶ Maria Morandi Cecchi and Luca Salasnich. The shallow water equations: State of the art and new trends. In *Computational Fluid Dynamics Review 1998*, pages 972–993. (World Scientific, Singapore, 1998), Hafez M. and Oshima K. (eds), 1998.
- ▶ M. Morandi Cecchi, M. Venturin and M. R. Russo. *Some Advantages of the Use of a Model Dedicated to the Venice Lagoon System*. International conference: Lagoons and Coastal Wetlands in the Global Change Context: Impacts and Management Issues (Venezia).
- ▶ M. Morandi Cecchi, M. Venturin. Characteristic Based Split (CBS) Algorithm Finite Element Modeling for Shallow Waters in the Venice Lagoon. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (DOI: 10.1002/nme.1690).